XXXI SEMANA NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN MATEMÁTICAS

MATLAB EN SISTEMAS DINÁMICOS

Carlos Figueroa Navarro, Lamberto Castro Arce
Departamento de Ingeniería Industrial, Departamento de Física, Matemáticas e Ingeniería
carlos.figueroa@unison.mx, lamberto.castro@unison.mx

Sistemas planares

Sistema planar es aquél cuyas trayectorias de solución están en un plano.

Sistemas dinámicos dados por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales.

EJEMPLO

$$Q''(t)+20\,Q'(t)+125\,Q(t) = 9\,sen(5t)$$

$$x'(t) = y(t)$$

$$y'(t) = 9\,sen\,(t) - 125\,x(t) - 20\,y(t)$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -125 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9\,\mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}$$

$$x'(t) = a\,x(t) + b\,y(t)$$
$$y'(t) = c\,x(t) + d\,y(t)$$

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema, entonces sus valores propios y vectores propios brindarán la dinámica del sistema para trayectorias que partan cerca del origen. Lo anterior se basa en el hecho de que dicha matriz tiene como propiedad la siguiente:

Los valores propios λ_1 y λ_2 son no negativos. En este caso tanto $x(t)$ como $y(t)$ crecen sin límite cuando $t \longrightarrow \infty$ por lo que toda trayectoria cercana al equilibrio se alejará. En este caso se dice que el equilibrio es equivalente a fuente .
Los valores propios λ_1 y λ_2 son negativos. En este caso tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden a cero cuando $t \longrightarrow \infty$ por lo que toda trayectoria cercana al equilibrio se acerca al origen. En este caso se dice que el equilibrio es equivalente a un pozo .
Los valores propios λ_1 y λ_2 tienen signos contrarios. En este caso ya sea $x(t)$ o $y(t)$ tiende a cero y la otra crece sin límite cuando $t \longrightarrow \infty$ por lo que toda trayectoria cercana al equilibrio se aleja de forma asintótica a uno de los ejes. En este caso se dice que el equilibrio es equivalente a una silla de montar .

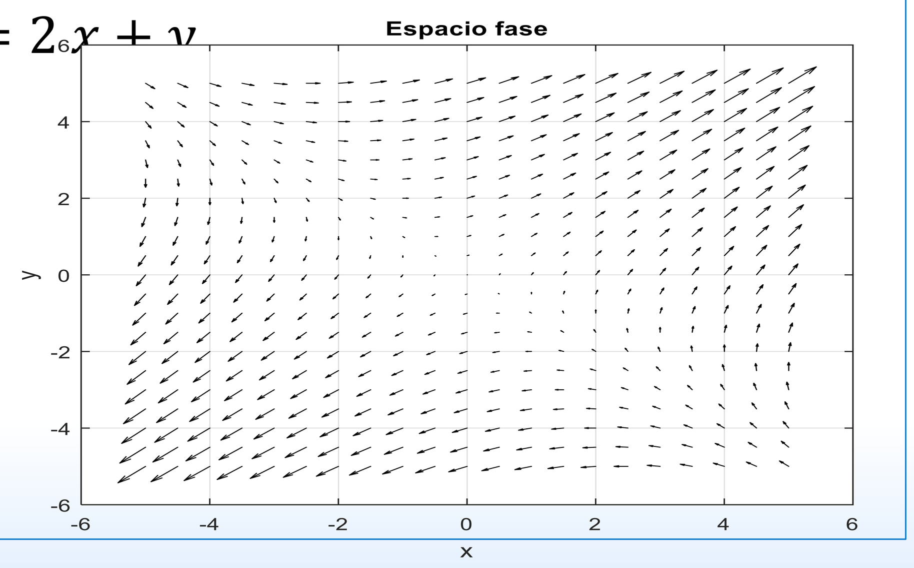
Los valores propios λ_1 y λ_2 son imaginarios con signo contrario. En este caso $x(t)$ e $y(t)$ forman una trayectoria cerrada en una dirección dada. En este caso se dice que el equilibrio es un centro .

Los valores propios λ_1 y λ_2 son complejos conjugados. En este caso $x(t)$ e $y(t)$ tiende a cero en forma espiral si la parte real es negativa o se alejan del equilibrio en forma espiral si la parte real es positiva. En este caso se dice que el equilibrio es equivalente a un pozo en el primer caso o a una fuente en el segundo. Enseguida algunos ejemplos:

$$x' = x + 2y$$
$$y' = 2x + y$$

$\lambda = 3$, $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1\,e^{3\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$x' = 3\,x + 5\,y$$
$$y' = -x + y$$

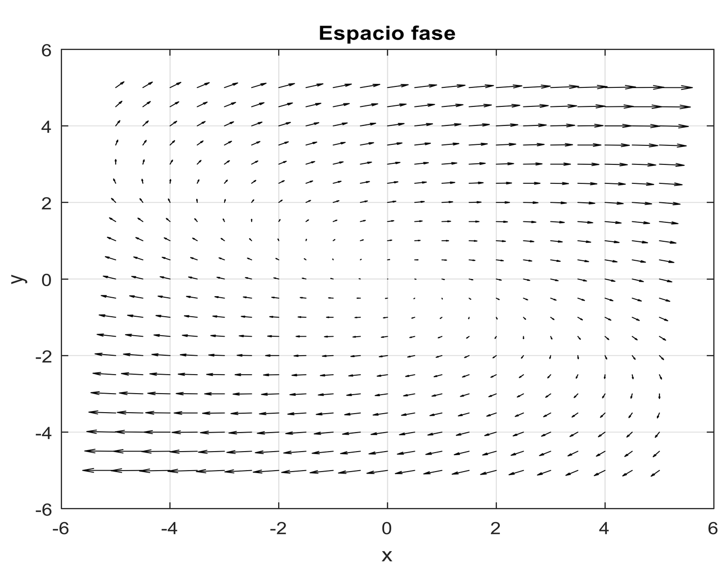
$$\lambda_1 = 2 + 2i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 2 - 2i$$

$$X_1 = e^{2\,t}\left[\cos(2t)\begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 \end{bmatrix} - sen(2t)\begin{bmatrix} 0 \\ 0.3651 \end{bmatrix}\right]$$

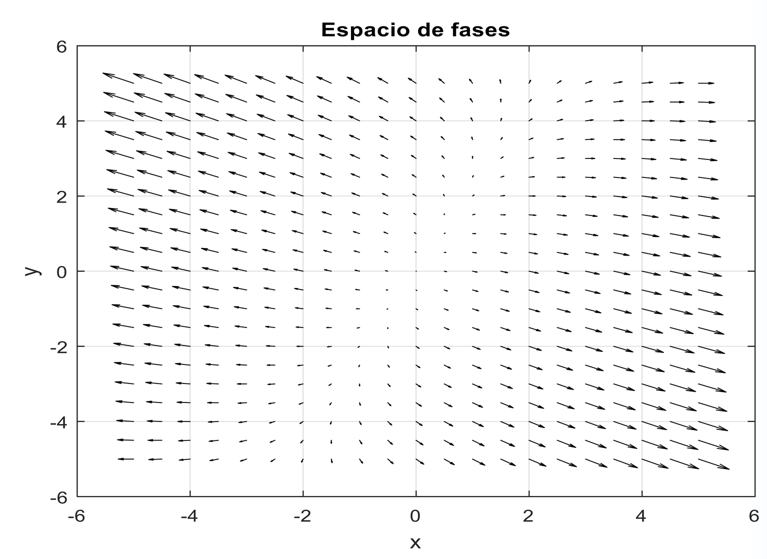
$$X_2 = e^{2\,t}\left[\cos(2t)\begin{bmatrix} 0 \\ 0.3651 \end{bmatrix} - sen(2t)\begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 \end{bmatrix}\right]$$

$$x' = 3x - y$$
$$y' = x + y$$

$$\lambda = 2$$



$$X = c_1 e^{2\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,e^{2\,t}\begin{bmatrix} 1+t \\ t \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -125 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9\,sen(t) \end{bmatrix}$$

a) $\lambda_1 = -10 - 5i$, $\lambda_2 = -10 + 5i$,

$$u_1 = \begin{bmatrix} -0.0797 \\ 0.9960 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0398 \\ 0 \end{bmatrix} i \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} -0.0797 \\ 0.9960 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0398 \\ 0 \end{bmatrix} i$$

$$X_1 = e^{-10\,t}\left[\cos(5t)\begin{bmatrix} -0.0797 \\ 0.9960 \end{bmatrix} - sen(5t)\begin{bmatrix} 0.0398 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$X_2 = e^{-10\,t}\left[\cos(5t)\begin{bmatrix} 0.0398 \\ 0 \end{bmatrix} - sen(5t)\begin{bmatrix} -0.0797 \\ 0.9960 \end{bmatrix}\right]$$

$$X(t) = c_1\,X_1 + c_2\,X_2$$

Software como MATLAB, GEOGEBRA O MATHEMATICA son grandes auxiliares en el manejo adecuado de la dinámica de sistemas, rama de las ecuaciones diferenciales con múltiples aplicaciones en ciencias e ingeniería, ejemplo en Robótica y Control